Практика 11. Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Пусть X – компактное метрическое пространство, α — его открытое покрытие(покрытие в математике – семейство множеств, таких, что их объединение содержит заданное множество), $N(\alpha)$ – наименьшая мощность подпокрытия (наименьшее число множеств, которые в объединении будут содержать X).

Определение 1.

Топологической энтропией покрытия α называется логарифм наименьшей мощности подпокрытия:

$$H(\alpha) = \ln N(\alpha).$$

Поскольку X компактно, $H(\alpha)$ – конечное число.

Пусть β – другое открытое покрытие пространства X.

Определение 2.

Измельчением покрытий α *и* β будем называть

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

В более общем случае можно рассмотреть семейство открытых покрытий

$$\{\alpha_r | r = 1, ..., n\}$$

и определить измельчение этих покрытий

$$\bigvee_{r=1}^{n} \alpha_r = \{A_1 \cap ... \cap A_n | A_1 \in \alpha_1, ..., A_n \in \alpha_n\}.$$

Ясно, что измельчение покрытий также является покрытием.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f : X \to X$. Прообраз покрытия α

$$f^{-1}\alpha = \{f^{-1}(A) | A \in \alpha\}$$

также покрывает пространство X. Для $n \geq 1$ рассмотрим следующее измельчение:

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee ... \vee f^{-(n-1)}\alpha =$$

$$= \{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap ... \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) | A_0, ..., A_{n-1} \in \alpha\}.$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 3.

Топологической энтропией отображения f относительно покрытия α называется

$$h(f,\alpha) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\right).$$

Можно показать, что для каждого f справедливо $h(f,\alpha) \leq H(\alpha)$. Поэтому верхний предел в последнем определении всегда существует. Более того, его можно заменить обычным пределом lim или знаком точной нижней грани inf. То есть получим

$$h(f,\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\right) = \inf_{n} \frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\alpha\right).$$

(Существование предела обеспечивает лемма Пойя).

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 4.

Топологической энтропией отображения f называется

$$h(f) = \sup_{\alpha}\{h(f, \alpha)\}.$$

Однако так данное определение не очень удобно для практических вычислений. Поэтому рассмотрим эквивалентные определения топологической энтропии непрерывного отображения f.

Пусть $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Определение 5.

Конечное подмножество $S \subset X$ называется $(n, \varepsilon)-$отделимым, если $\forall x, y \in S, x \neq y$, найдется такое $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, что $\rho(f^k(x), f^k(y)) \geq \varepsilon$, где ρ – метрика на пространстве X.

Обозначим $s(n, \varepsilon)$ максимальную мощность (n, ε)-отделимого множества. В силу компактности X выполнено $s(n, \varepsilon) < +\infty$.

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение 6.

Конечное подмножество $R \subset X$ называется (n, ε)–плотным, если $\forall x \in X, \exists y \in R$, что для любого $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, справедливо $\rho(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon$.

Обозначим $r(n, \varepsilon)$ максимальную мощность (n, ε)–плотного множества. Благодаря компактности $r(n, \varepsilon) < +\infty$.

Определение 7.

Имеют место следующие равенства(эквивалентно определению энтропии):

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon).$$

Дать определение топологической энтропии? В чём её отличие от метрической энтропии?

Определение формализует следующее нестрогое понятие: для неизвестной начальной точки, какое количество информации нужно получить в расчёте на одну итерацию, чтобы предсказать большое количество итераций с небольшой фиксированной ошибкой.

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Метрическая энтропия описывает хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, а топологическая энтропия описывает хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.